

Fyzika a intuícia

(a kde intuícia vo fyzike zlyháva)

Matej Badin

Úvodné sústreďenie Turnaja mladých fyzikov

21. Október 2025

- "*Dôveruj, ale preveruj!*"
Ivan Košinár, úvodné sústreďenie pre študentov fyziky na FMFI; v roku 2014
- "*The first principle is that you must not fool yourself, and you are the easiest person to fool.*"
Richard P. Feynman

Ako rýchlo overiť či súper hovorí pravdu?

- Rozmerová analýza
- Škálovanie
- Rádové odhady
- Analýza limitných prípadov
- Na čo si dať pozor pri analýze prezentácie
- Ďalšie často používané metódy
- Často sa opakujúce vzory vo fyzike

Rozmerová analýza

Každá fyzikálna veličina má svoju jednotku¹

- Čas nemeríme v kilogramoch, ale v sekundách, hodinách, atď.
- Dĺžku meríme v metroch, kilometroch, atď.
- Pre **rozmerovú analýzu** výber konkrétnej jednotky nie je dôležitý, ale dôležité je, že čas nemeríme v metroch, a pod.
- **Rozmerová analýza** nám teda umožňuje uhádnuť nejakú *polynomickú závislosť* medzi rôznymi veličinami, ktoré sa nám **javia**, že sú dôležité pre opis nejakého javu.
- Veličina t teda môže mať rozmer času.

¹s malými výnimkami veličín, ktoré sú definované ako relatívne k nejakej referencii napr. relatívna permeabilita.

Príklad

Periódá matematického kyvadla

Ako závisí periódá kyvadla v homogénnom tiažovom poli od relevantných parametrov?

- Periódá T má rozmer času, čo označíme ako $[T]$.
- Od čoho môže závisieť periódá kyvadla?

Hmotnosť závažia	m	$[M]$
Tiažové zrýchlenie	g	$[L][T]^{-2}$
Dĺžka kyvadla	l	$[L]$
Počiatočná výchylka	θ_0	1
	veličina	rozmer

$$T = m^\alpha g^\beta l^\gamma \theta_0^\delta$$

$$T \stackrel{!}{=} ([M])^\alpha ([L][T]^{-2})^\beta ([L])^\gamma (1)^\delta$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = -1/2$$

$$\gamma = 1/2$$

$$\delta \in \mathbb{R}$$

Príklad

Periódá matematického kyvadla

Ako závisí periódá kyvadla v homogénnom tiažovom poli od relevantných parametrov?

- Periódá T má rozmer času, čo označíme ako $[T]$.
- Od čoho môže závisieť periódá kyvadla?

$$T = m^\alpha g^\beta l^\gamma \theta_0^\delta$$

$$T \stackrel{!}{=} ([M])^\alpha ([L][T]^{-2})^\beta ([L])^\gamma (1)^\delta$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = -1/2$$

$$\gamma = 1/2$$

$$\delta \in \mathbb{R}$$

$$T = \underbrace{f(\theta)}_{\text{bezrozmerné číslo}} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Argumenty funkcií sú bezrozmerné čísla

- Argumenty funkcií musia byť bezrozmerné čísla.
- Ak **rôzne kombinácie** parametrov vedú na viacero rôznych bezrozmerných čísel zahŕňajúce hľadaný parameter, potom ho z rozmerovej analýzy nevieme určiť **jednoznačne**.

Príklad - Odpor vzduchu

Od čoho môže závisieť sila odporu prostredia na guľičku?

$$F = \rho R^2 v^2 \underbrace{f\left(\frac{vR}{\nu}\right)}_{\text{bezrozmerné číslo}}$$

Hustota	ρ	$[M][L]^{-3}$
Polomer guľičky	R	$[L]$
Rýchlosť guľičky	v	$[L][T]^{-1}$
Viskozita	ν	$[L]^2[T]^{-2}$
	veľičina	rozmer

Funkcia f môže mať **komplikovaný priebeh** v závislosti od numerickej hodnoty argumentu! Napr. niekedy ako $f(x) \sim 1/x$, inokedy ako $f(x) \sim 1$.

Bezrozmerné čísla

- Predchádzajúci príklad demonštruje, že pre výslednú fyzikálnu závislosť môže byť zrejme dôležitá numerická hodnota bezrozmerných kombinácií parametrov, ktoré predpokladáme, že opisujú relevantné javy.

Príklad - rýchlosť šírenia vln vo vode

Vlnová dĺžka	λ	[L]
Tiažové zrýchlenie	g	[L][T] ⁻²
Hĺbka voda	h	[L]
Hustota	ρ	[M][L] ⁻³
Povrchové napätie	σ	[M][T] ⁻²
	veličina	rozmer

$$\frac{h}{\lambda}, \frac{\sigma}{\lambda^2 \rho g}, \frac{\sigma}{h^2 \rho g}$$

$$v = \sqrt{\lambda g} f\left(\frac{h}{\lambda}\right) g \left(\frac{\sigma}{\lambda^2 \rho g}\right) h \left(\frac{\sigma}{h^2 \rho g}\right)$$

Funkcie f , g a h vieme zistiť len na základe experimentu!

- **Experiment** rozhodne, ktorá kombinácia parametrov, prípadne pri akých konkrétnych numerických hodnotách, je dôležitá.

Bezrozmerné čísla - medové špirály²

Príklad zo života



Príklad zo života - *padajúci prúd medu z čajovej lyžičky, ale aj priemyselné aplikácie.*

²Habibi et al., **Dynamics of liquid rope coiling**. Phys. Rev. E 74, 066306 (2006)

Bezrozmerné čísla - medové špirály³

Príklad zo života



Príklad zo života - padajúci prúd medu z čajovej lyžičky, ale aj priemyselné aplikácie

Frekvencia	Ω	$[T]^{-1}$
Výška	h	$[L]$
Viskozita	ν	$[L]^2[T]^{-2}$
Prietok	Q	$[L^3][T]^{-1}$
Polomer prúdu	r	$[L]$
Hustota	ρ	$[M][L]^{-3}$
Tiažové zrýchlenie	g	$[L][T]^{-2}$
...		
	veličina	rozmer

³Habibi et al., **Dynamics of liquid rope coiling**. Phys. Rev. E 74, 066306 (2006)

Bezrozmerné čísla - medové špirály

Príklad

Frekvencia	Ω	$[T]^{-1}$
Výška	h	$[L]$
Viskozita	ν	$[L]^2[T]^{-2}$
Prietok	Q	$[L^3][T]^{-1}$
Polomer prúdu	r	$[L]$
Hustota	ρ	$[M][L]^{-3}$
Tiažové zrýchlenie	g	$[L][T]^{-2}$
	veličina	rozmer

$$\Omega = \frac{Q}{hr^2}$$

$$\Omega = \left(\frac{gQ^3}{\nu r^8} \right)^{1/4}$$

$$\Omega = \left(\frac{Q^4}{\nu r^{10}} \right)^{1/3}$$

Ktorý z výsledkov je správny?

Bezrozmerné čísla - medové špirály

Príklad

Frekvencia	Ω	$[T]^{-1}$
Výška	h	$[L]$
Viskozita	ν	$[L]^2[T]^{-2}$
Prietok	Q	$[L^3][T]^{-1}$
Polomer prúdu	r	$[L]$
Hustota	ρ	$[M][L]^{-3}$
Tiažové zrýchlenie	g	$[L][T]^{-2}$
	veličina	rozmer

$$\Omega = \frac{Q}{hr^2}$$

$$\Omega = \left(\frac{gQ^3}{\nu r^8} \right)^{1/4}$$

$$\Omega = \left(\frac{Q^4}{\nu r^{10}} \right)^{1/3}$$

Ktorý z výsledkov je správny? **Všetky!**

Kde rozmerová analýza zlyhá

- Výsledkom rozmerovej analýzy môže byť nejjednoznačné riešenie lineárnej rovnice pre koeficienty mocnín. Situácia zväčša nastane ak považujeme pre opis fyzikálneho javu podstatných viacero veličín s rovnakým fyz. rozmerom. Vid' napr. minulý príklad.

Čo rozmerová analýza neodhalí?

- Tvar funkcií, do ktorých vstupujú bezrozmerné argumenty, odhalí len presný výpočet alebo experiment.

Príklad - perióda matematického kyvadla

$$T = f(\theta_0) \sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$f(\theta_0) = 2\pi \left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \dots \right)$$

- Môže však významne obmedziť priestor hľadania pre experiment alebo simuláciu.

Na čo je teda rozmerová analýza vhodná?

- Rozmerová analýza nám teda umožňuje uhádnuť nejakú **polynomickú závislosť** medzi rôznymi veličinami, ktoré sa nám **javia**, že sú **dôležité** pre opis javu.
- Konkrétny tvar matematickej závislosti teda vieme zistiť, len skúmaním nejakej vhodnej kombinácie experimentálnych parametrov – nemusíme meniť všetky parametre, stačí iba tie, ktoré vstupujú do rôznych bezrozmerných kombinácií parametrov. Môže významne pomôcť, keďže nemusíme vedieť meniť iba jeden parameter nezávisle - príklad zmena kvapaliny.
- **Pozor exaktné riešenie, z ktorého možno odvodiť všetky limity môže byť veľmi komplikované!**

Kde si precvičiť rozmerovú analýzu?

- P. Goldreich, S. Mahajan, S. Phinney. **Order-of-Magnitude Physics: Understanding the World with Dimensional Analysis, Educated Guesswork, and White Lies.** Added and edited Draft 1999 of PhD thesis of S. Mahajan

Škálovanie

Ako z jedného riešenia vygenerovať druhé

- Niekedy vieme opísať jav pomocou rovníc, ktoré predpokladáme, že platia, napr. druhý Newtonov zákon, a pod. Ak predpokladáme, že poznáme všetky sily, ktoré pôsobia na teleso.
- Väčšina fyzikálnych zákonov má charakter diferenciálnych rovníc alebo rovníc.

Príklad - pád rebríka

Za aký čas padne na zem 5 m rebrík, ak bod dotyku sa po celý čas nehýbe, ak ceruzka padne za 1.5 s?

$$\frac{1}{3} mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \frac{L}{2} \sin(\theta)$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2L} \sin(\theta)$$

Ako z jedného riešenia vygenerovať druhé

Príklad - pád rebríka

Za aký čas padne na zem 5 m rebrík, ak bod dotyku sa po celý čas nehýbe, ak ceruzka padne za 1.5 s?

$$\frac{1}{3}mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \frac{L}{2} \sin(\theta)$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2L} \sin(\theta)$$

- Napriek tomu, môžeme využiť fakt, že riešenia prislúchajúce rôznym numerickým hodnotám nejako musia súvisieť. (Musia, lebo sú opísané rovnakým fyz. zákonom, a teda matematický opis je rovnaký.)

Ako z jedného riešenia vygenerovať druhé

Príklad - pád rebríka

Za aký čas padne na zem 5 m rebrík, ak bod dotyku sa po celý čas nehýbe, ak ceruzka padne za 1.5 s?

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2L} \sin(\theta)$$

$$t \rightarrow At$$

$$L \rightarrow BL$$

$$\frac{1}{A^2} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{B} \frac{3g}{2L} \sin(\theta)$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{A^2}{B}\right) \frac{3g}{2L} \sin(\theta)$$

Ako z jedného riešenia vygenerovať druhé

Príklad - pád rebríka

Za aký čas padne na zem 5 m rebrík, ak bod dotyku sa po celý čas nehýbe, ak ceruzka padne za 1.5 s?

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \left(\frac{A^2}{B} \right) \frac{3g}{2L} \sin(\theta)$$
$$\left(\frac{A^2}{B} \right) \stackrel{!}{=} 1$$
$$T_1 = T_2 \sqrt{B}$$
$$T \approx 1.5s \sqrt{5/0.15} \approx 8.6s$$

- Poučenie: Aj keď nevieme presne (alebo približne) vyriešiť diferenciálnu rovnicu, vieme zistiť dostatočne veľa o charaktere jej riešenia.

Škálovanie - sofistikovanejšia rozmerová analýza

- Niekedy diferenciálnu rovnicu nemusíme vedieť ani poriadne zapísať alebo môžeme predpokladať platnosť nejakého vzťahu iba približne napr. „zákon zachovania mechanickej energie“ resp. robíme veľmi hrubé zjednodušenia.

Príklad - lúčny koník

Do akej približnej výšky vyskočí slon, ak lúčny koník vyskočí do 1 m.

$$E_{pot} \approx mgh$$

$$W \approx Fs$$

$$m \sim \rho L^3$$

$$F \sim L^2$$

$$s \sim L$$

Čo je v úvahe zle?

Škálovanie - a fraktálna štruktúra - štandardný príklad



$$I(a) = 3I\left(\frac{a}{3}\right) + 3m\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2$$

$$I(a) \sim \rho a^2 \cdot a^2$$

Kde sa dozvedieť viac?

- Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.; Univerzita Komenského, Teoretická mechanika | Prednáška č. 12, Youtube
- B. Rabatin, (neoficiálne) skriptá k predmetu Teoretická mechanika

Rádové odhady

Ako na to?

- Postupujeme a rozmýšľame zvyčajne od konca.

Príklad

Aká je hodnota kritického elektrického poľa pre vznik iskry vo vzduchu pri izbovej teplote a vlhkosti?

Pre hodnotu intenzity elektrického poľa máme zrejme zlú intuíciu. Lepšiu intuíciu máme zrejme z predstavy školských pokusov pre rádoový odhad napätia na van-der Graffovom generátore a predstave na akú najväčšiu vzdialenosť sa vieme priblížiť s nejakým iným predmetom, aby preskočila iskra.

- Snažíme sa využiť informácie, ktorých numerické hodnoty vieme s čo najlepšou presnosťou.
- A nejaké fyz. zákony, ktorých platnosť predpokladáme (tie nám dajú mat. vzťahy).
- Zväčša potrebujeme vykonať sériu takýchto úvah.

Príklad

Počet taxikárov

Koľko taxikárov pracuje v Bratislave?

Zdroj: doc. V. Černý, Fermi-ho úlohy

[https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi_problem]

Príklad

Počet taxikárov

Koľko taxikárov pracuje v Bratislave?

- Koľko je pracujúcich denne v Bratislave?
- Aké sú náklady na život?
- Cena benzínu
- DPH
- Dane a odvody
- Priemerná dĺžka cesty?
- Cena lístka na MHD?
- Údržba automobilu ...

Pekné knižky s fyzikálnymi "puzzles"

- J. Bryant and C. Sangwin. **How Round is Your Circle?**, New Jersey, Princeton University Press, 2008.
- L. Weinstein. **Guesstimation 2.0**, New Jersey, Princeton University Press, 2012.
- C. Swartz. **Back of Envelope Physics**, The Johns Hopkins University Press, 2003.
- P. Goldreich, S. Mahajan, S. Phinney. **Order-of-Magnitude Physics: Understanding the World with Dimensional Analysis, Educated Guesswork, and White Lies**.
- P. Gnädig, G. Honyek, K. F. Riley. **200 Puzzling Physics Problems**, Cambridge University Press. 2001

Analýza limitných prípadov

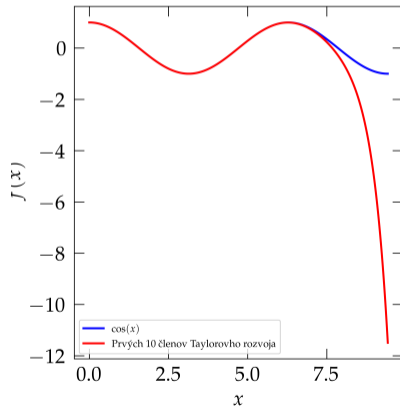
Taylorov rozvoj⁴

Každú "rozumnú funkciu" možno v dostatočne blízkom okolí bodu x_0 aproximovať radom polynomických funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, kde koeficienty a_n súvisia s deriváciou funkcie $f(x)$ v bode x_0 ako

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0}.$$

Pr.:

$$\cos(x) \approx 1 - x^2/2 + \dots$$



- Aproximovať môžeme priebeh funkcie vo výslednom vzorci, v rovnici, v dif. rovnici, ...

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Priebehy známych funkcií⁵

Priebehy týchto funkcií by mal každý skúsený TMF-ák ovládať.

- x
- x^α
- $1/x$
- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\tan(x)$
- e^x
- A^x
- $\log(x)$
- $\arcsin(x)$
- $\arccos(x)$
- $\arctan(x)$
- $\sinh(x)$
- $\cosh(x)$
- $\tanh(x)$
- ...

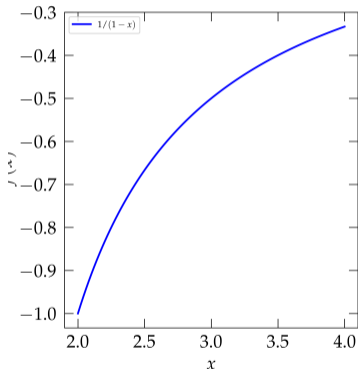
⁵a ďalšie užitočné vzťahy, ktoré sa oplatí naučiť z matematicko-fyzikálnych tabuliek, rôznych vzorcovníkov ako napr. The Cambridge Handbook of Physical Formulas.

Polomer konvergence⁶

Pozor! Sčítaním (aj celého nekonečného) radu môžeme dostať výraz závislý od x , ktorý konverguje k pôvodnej funkcii len do určitej vzdialenosti od pôvodného bodu x_0 . Príklad:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

platí len pre $|x| < 1$!



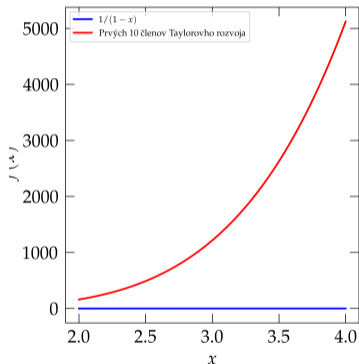
⁶Nepovinné načrtnutie informácie, ktoré sa objaví až v prvom ročníku vysokej školy. Pre bližšie štúdium sa oplatí pozrieť vysokoškolskú učebnicu matematickej analýzy.

Polomer konvergenencie⁷

Pozor! Sčítaním (aj celého nekonečného) radu môžeme dostať výraz závislý od x , ktorý konverguje k pôvodnej funkcii len do určitej vzdialenosti od pôvodného bodu x_0 . Príklad:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

platí len pre $|x| < 1$!



⁷Nepovinné načrtnutie informácie, ktoré sa objaví až v prvom ročníku vysokej školy. Pre bližšie štúdium sa oplatí pozrieť vysokoškolskú učebnicu matematickej analýzy.

Fyzikálne symetrie

- (Ne)existencia význačného smeru. Príklad: *Magnetické pole budené nekonečne dlhým el. vodičom.*
- Symetria voči obrátenia času $t \rightarrow -t$
- Priestorová inverzia $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$
- Priestorové symetrie
- Permutačné symetrie objektov hrajúcich rovnakú úlohu. Príklad: *Výsledok by nemal závisieť od konkrétneho označenia závaží $m_1 \Leftrightarrow m_2$, ktoré "vstupujú do situácie rovnako".* Výsledkom môže byť **invariantnosť označenia** vo výsledných výrazoch.
- a pod.

Príklad

Kocka

V delta kvadrante sa nachádza obrovská homogénna borgeská kocka s hustotou ρ a dĺžkou hrany a . Radi by sme vedeli, aká veľká sila pôsobí na hmotný bod Enterprise hmotnosti m nachádzajúci sa mimo kocky na spojnici jedného vrcholu a stredu planéty, ak je vo vzdialenosti d od najbližšieho z vrcholov. Je niektorá z nasledovných možností správna?

- $\frac{2Gma^3\rho}{(a+d)^4}$
- $\pi Ga^4\rho^2$
- $\frac{Gm\rho a^3}{(d+a)^3} \left[d + \frac{2a\pi}{\sqrt{3}} \right]$
- $\frac{Gma^3\rho \ln d}{(a+d)^2}$
- $\frac{4Gm\rho a^3}{3(a+d)^2}$
- $\frac{Gm\rho a^3}{(d+a)^3} \left[\frac{1}{8} a\pi + d \right]$
- $Gma\rho$
- $\frac{Gma^2\rho}{d+a}$
- $\frac{Gma^3\rho}{d^2}$

Zdroj: FKS, 26. ročník, 2010/2011, 2. séria letnej časti

Kde sa dozvedieť viac

- Juraj Tekel - Prednáška: "**Ako odhaliť nesprávny výsledok**".
<https://davinci.fmph.uniba.sk/~tekel1/docs/zleriesenia.pdf>
- Materiály Letnej školy FKS - <http://fks.sk/1s>

Na čo si dať pozor
pri analýze prezentácie

Argumentačné omyly⁸

- **Logické chyby** - ak sa nedržíme matematickej logiky pri argumentácií, potom môžeme dokázať hocičo.
- **Ad hoc argument**
- **Argument autoritou** - príklad: "*Našiel som to v zdroji X. Preto to musí byť pravda.*"
- "**Dokazujem, čo predpokladám**"
- **Falošná dilema, kettle logic** - príklad: "*Bud' X alebo Y.*"... a zanedbáme iné možnosti ako napr. Z.

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fallacies

Kognitívne omyly pri riešení úlohy⁹

- **Base rate fallacy** - zanedbanie objektívnej informácie o pravdepodobnosti a zahrnutie iba podmienených pravdepodobností.
- **Sunk cost fallacy** - príklad: "*Do simulácie sme už investovali toľko času! Dajme tomu ešte kúsok, už musí fungovať.*"
- **IKEA effect** - "*... nevymysleli sme to my, tak tomu neveríme ...*", a pod.
- ...

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_cognitive_biases

Chyby pri návrhu experimentu¹⁰

- **Cherry picking** - vyberáme udalosti, javy, dôkazy, ktoré sa nám hodia.
- **p-hacking** - manipulácia s dátami takým spôsobom, že niektoré javy sa začnú javiť ako štatisticky významné.
- **Wishful thinking** - Priali by sme si, aby sme videli jav X. Zámerné ovplyvníme systematicky experiment tak, že pozorujeme jav X a nie Y.
- ...

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_cognitive_biases

Ďalšie často používané metódy*

* - časť prezentácie pre "skúsených tmfákov"

Lineárna superpozícia

Veľké množstvo diferenciálnych rovníc vo fyzike je tzv. lineárnych. T.j. ak $f(x)$ a $g(x)$ sú riešeniami danej diferenciálnej rovnice, potom aj funkcia

$$h(x) \equiv \alpha f(x) + \beta g(x)$$

je riešenie danej diferenciálnej rovnice. To nám umožňuje v takýchto prípadoch **vyskladať** riešenie fyz. problému, ktoré sa javí ako komplexné z jednoduchších kúskov.

Príklady:

- Elektrostatika
- Magnetostatika
- Vlnová rovnica
- Rovnica vedenia tepla
- ...

Fourierov rozvoj¹¹

Harmonický signál $f(t)$ môžeme rozložiť ako lineárnu superpozíciu harmonických signálov

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t).$$

Koeficienty A_n a B_n možno exaktne vypočítať.

¹¹Pozri napr. David Morin - Waves - <https://davidmorin.physics.fas.harvard.edu/books/waves/>

Ansatz

- Častokrát sa stane, že vieme opísať fyzikálny jav pomocou **diferenciálnej rovnice**, ktorá však môže mať **veľa rôznych druhov riešení v závislosti od okrajových alebo počiatočných podmienok**. Rovnicu nemusíme vedieť vyriešiť, ale na základe intuície **môžeme uhádnuť riešenie** s dostatočnou voľnosťou a závislosť medzi voľnými parametrami získať **dosadením riešenia** do diferenciálnej rovnice.

Príklad - vlnová rovnica a stojaté vlny na obruči

Časový vývoj priečnej výchylky $u(x, t)$ je na obruči s polomerom R daný vlnovou rovnicou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Existuje veľa riešení tejto rovnice. Ak sa obmedzíme na stojaté vlny, t.j. riešenie v tvare

$$u(\phi, t) = A \sin(k\phi) \sin(\omega t) + B \cos(k\phi) \sin(\omega t)$$

tak vieme dosadením takéhoto tvaru riešenia do dif. rovnice zistiť vzťah medzi k , R , ω a c 46 / 66

Poruchový počet¹²

- Ak diferenciálnu rovnicu nevieme vyriešiť, úlohu si môžeme skúsiť zjednodusiť! Ak niektoré členy v dif. rovnici sú typicky malé, môžeme skúsiť vyriešiť diferenciálnu rovnicu iteratívne, kde najprv zanedbáme tieto malé členy a neskôr ich pridáme. Takýto postup sa nazýva "*series method*". Správnosť riešenia a rozsah jeho validity musíme však dodatočne zistiť.

Príklad - voľný pád guľičky s odporom vzduchu

Riešme rovnicu

$$\dot{u} + \alpha + \beta u^2 = 0.$$

Pre $\beta = 0$ riešenie poznáme ako $u(t) = u_0(t) = -\alpha t$. Skúsme predpokladať riešenie v tvare:

$$u(t) = u_0(t) + \beta u_1(t) + \beta^2 u_2(t) + \dots$$

¹²Vid' napr. prednášky doc. Fecka alebo
https://davinci.fmph.uniba.sk/~tekel1/docs/poruchovy_pocet.pdf

Poruchový počet

Príklad - voľný pád guľičky s odporom vzduchu

Skúsme predpokladať riešenie v tvare:

$$u(t) = u_0(t) + \beta u_1(t) + \beta^2 u_2(t) + \dots$$

Dosadením do dif. rovnice a porovnaním členov (s rovnakou mocninou β) dostaneme:

$$(\dot{u}_0(t) + \beta \dot{u}_1(t) + \beta^2 \dot{u}_2(t) + \dots) + \alpha + \beta (u_0(t) + \beta u_1(t) + \beta^2 u_2(t))^2 = 0$$

$$\dot{u}_0 + \alpha = 0$$

$$\beta [\dot{u}_1 + u_0^2] = 0$$

$$\beta^2 [2\dot{u}_2] = 0$$

...

Aký je v tomto prípade záver? Do akého času je riešenie platné?

Porovnajete s exaktným riešením $u(t) = -\sqrt{\alpha/\beta} \tan [\sqrt{\alpha\beta}t]$

Analýza stability¹³

- Parciálna dif. rovnica, t.j. rovnica, ktorej riešenie závisí aspoň od dvoch rôznych premenných, napr. poloha x a čas t , môže mať častokrát nejaké stacionárne riešenie, ktoré je stabilné (ustálený stav) t.j. $\phi(x, t) = \phi_0(x)$. Môže nás zaujímať otázka, či existuje nejaká kritická vlnová dĺžka, pri ktorej začne výchylka v systéme rásť a tento ustálený stav zruší.

Dif. rovnica opisujúca vznik vzorov - Swift-Hohenberg model

Model:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - [a\phi + b\phi^2 + c\phi^3] + \gamma_0 \Delta \phi - \gamma_2 \Delta^2 \phi$$

Stacionárne riešenia:

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) = 0$$

$$\phi(x, t) = \phi_{\pm}(x) = \phi_{\pm} = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}} \quad (1)$$

¹³Užitočný zdroj: Mark H. Holmes, Introduction to Perturbation Methods. Springer, 2013

Analýza stability

Dif. rovnica opisujúca vznik vzorov - Swift-Hohenberg model

Stacionárne riešenia:

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) = 0$$

$$\phi(x, t) = \phi_{\pm}(x) = \phi_{\pm} = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}}$$

Ansatz pre malú výchylku okolo stacionárneho riešenia ($k = 2\pi/\lambda$):

$$\phi(x, t) = \phi_{\text{const}}(x) + \epsilon e^{\alpha t - ikx}$$

Dosadením a **linearizáciou** rovnice t.j. porovnaním členov rádu ϵ dostaneme

$$\alpha_0 = -(a + \gamma_0 k^2 + \gamma k^4)$$

$$\alpha_{\pm} = - \left[-(2a + b\phi_{\pm}) + \gamma_0 k^2 + \gamma_2 k^4 \right]$$

Analýza stability

Dif. rovnica opisujúca vznik vzorov - Swift-Hohenberg model

Dosadením a **linearizáciou** rovnice t.j. porovnaním členov rádu ϵ dostaneme

$$\alpha_0 = -(a + \gamma_0 k^2 + \gamma k^4)$$

$$\alpha_{\pm} = -[-(2a + b\phi_{\pm}) + \gamma_0 k^2 + \gamma_2 k^4]$$

Ak $\alpha > 0$ výchylka sa začne v čase zväčšovať. Vieme teda odpovedať na otázku, aká bude vlnová dĺžka vzoru, ktorý vznikne.

Prechod do bezrozmerných súradníc

- Pri **numerickom riešení** diferenciálnych rovníc na počítači sa môžeme stretnúť so situáciou, kedy násobíme vzájomne veľa čísiel s dramaticky odlišným rádom, ktorý sa navzájom ruší. Môže byť preto užitočné zaviesť **charakteristické** rozmery pre jednotlivé premenné a diferenciálnu rovnicu upraviť do tvaru, kde koeficienty s navzájom odlišným rádom vytvárajú bezrozmerné kombinácie rádu 1.

Príklad - riešenie vlnovej rovnice

Časový vývoj priečnej výchylky $u(x, t)$ je na obruči s polomerom R daný vlnovou rovnicou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Prechod do bezrozmerných súradníc

Príklad - riešenie vlnovej rovnice

Charakteristický rozmer $\rightarrow R$. Transformácia $x = R\phi$ vieme získať bezrozmernú súradnicu y . Transformácia $\tau = \omega t$ sprostredkúva prechod k bezrozmernému času. Dosadením oboch výrazov do dif. rovnice vyššie získame rovnicu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\omega^2 c^2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

Je na nás aké zvolíme ω , ak zvolíme $\omega = R/c$, tak rovnica prejde na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

Riešenie takejto rovnice je numericky stabilnejšie. **Rozmyslite si súvis so zmenou škály!**

Separácia časových škál¹⁴

- Užitočná metóda, ak predpokladáme, že riešenie má charakter niečoho rýchlo vyvíjajúceho skombinovaného s niečím čo je modulované pomaly t.j. na inej časovej škále.

Štandardný príklad z literatúry - van der Pol oscilátor

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \epsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} + u = 0$$

Urobiť ansatz v tvare

$$u(t) = A(t) \cos(t + \phi(t))$$

a odlíšiť spriemerovaný časový vývoj na škále $1/\epsilon$ a rýchly vývoj na škále 1. Vid' literatúra.

¹⁴Užitočný zdroj: Mark H. Holmes, Introduction to Perturbation Methods. Springer, 2013

Laplacova transformácia

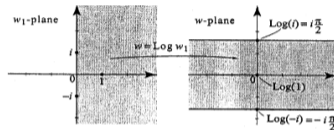
Analóg Fourierovej transformácie, ale vhodný na skúmanie nie harmonických ale prechodových javov napr. v RLC obvodoch.

$$f(t) \rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Konformné transformácie

Transformácia z dif. geometrie a analýzy funkcií komplexnej premennej. Umožňuje napríklad získať riešenie Laplaceovej rovnice v elektrostátike pre komplikovanú geometriu zo znalosti riešenia tvaru elektrického pola s jednoduchšou geometriou. Pravdepodobne to nevyužijete priamo pri TMF, ale je to dobré vedieť, pri čítaní niektorých článkov^a

^aPríklad - chcem vedieť ako vyzerá elektrické pole v okolí ihly.



Príklad: zobrazenie polroviny do nekonečne širokej dutiny

Často sa objavujúce vzory vo fyzike

Harmonický oscilátor¹⁵

Existuje len obmedzený počet exaktne riešiteľných úloh vo fyzike. Jedným z nich je harmonický oscilátor. Kedykoľvek vieme upraviť alebo rozviť energiu systému okolo pot. minima do tvaru:

$$V(x) \approx V_0 + \frac{1}{2}\alpha(x - x_0)^2 + \dots \quad (2)$$

riešením budú malé kmity v parametri x s frekvenciou $\omega = \sqrt{\alpha/m}$.

¹⁵Pozri napr. David Morin - Waves - <https://davidmorin.physics.fas.harvard.edu/books/waves/>

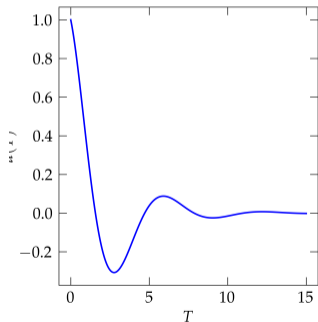
Tlmený harmonický oscilátor

Tri možné režimy. Príklad časového vývoja pre prípad $\beta < 4\alpha^2$ (podkritické tlmenie).

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \beta \frac{du}{dt} + \alpha u = 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta > 0$$



Budený tlmený harmonický oscilátor

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \beta \frac{du}{dt} + \alpha u = f_0 \cos(\Omega t)$$

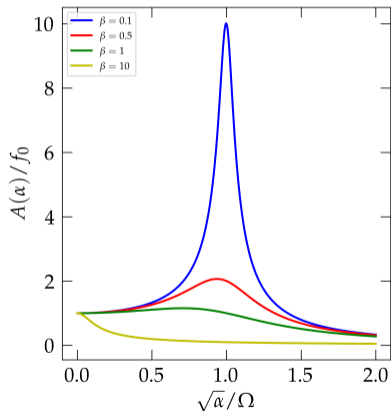
$$\alpha > 0$$

$$\beta > 0$$

$$f_0 > 0$$

Riešenie: $u(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{((\Omega^2 - \alpha))^2 + \beta^2 \alpha}}$$



Previazanie dvoch systémov - módy a rázy¹⁶

Najjednoduchší príklad dve závažia
prepojené pružinkou:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \kappa(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + \kappa(x_2 - x_1)$$

Riešením je superpozícia *symetrického* a
antisymetrického módu.

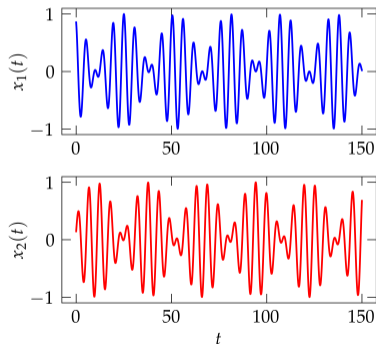
$$x_1(t) + x_2(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

$$x_1(t) - x_2(t) = A_a \cos(\omega_a t + \phi_f)$$

s frekvenciami $\omega_s = \sqrt{k/m}$ a

$$\omega_a = \sqrt{(k + 2\kappa)/m}$$

Príklad časového vývoja.



¹⁶Pozri napr. David Morin - Waves - <https://davidmorin.physics.fas.harvard.edu/books/waves/>

Parametrická rezonancia

Skúmame harmonický oscilátor, ktorého vlastná frekvencia sa periodicky mení v čase.
Príklad zo života: *hojdačka*.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (\alpha + \gamma \cos(\Omega t)) u = 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\gamma > 0$$

Ide o tzv. **Mathieu equation**. V $\alpha - \gamma$ priestore existujú rôzne kvalitatívne oblasti, kde sa správanie systému dramaticky mení.

Požiadavka na self-konzistentnosť

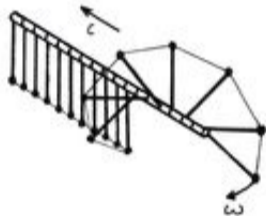
- Niektoré úlohy vieme riešiť len sadou vzájomne previazaných rovníc, ktoré musia byť splnené. Ak ale rovnice nie sú lineárne v neznámych, tak je veľmi pravdepodobné, že dané rovnice nevieme riešiť. Vhodnou stratégiou je potom skúsiť riešiť rovnice iteratívne. T.j. tipnúť si riešenie, ktoré vieme, že je blízko výsledku ale nie je vhodné, dosadiť ho do jednej z rovníc a následne získať riešenie pre inú veličinu a to dosadiť do rovníc odkiaľ nájdeme nový odhad čiastkového riešenia.

Príklad - klasická mechanika

Numerické riešenie pohybových rovníc systému s väzbami, ktoré nevieme ošetriť vhodnou parameterizáciou súradníc, časti algoritmov numerických optimalizačných metód, atď.

Nelinearita - môže všetko pokaziť, ale aj stabilizovať

IYPT 2013 - Soliton



[[iypt.org/problems/
iypt-2013-problems/](http://iypt.org/problems/iypt-2013-problems/)]

Pohybovú rovnicu pre i -te kyvadielko možno napísať ako:

$$I\ddot{\theta}_i = Fl^2/a^2 [\theta_{i-1} + \theta_{i+1} - 2\theta_i] - mgl \sin(\theta_i)$$

Posledný člen prameniáci z momentu tiažovej sily spôsobí, že vlnový balík v tvare

$$\phi(x, t) = 4\text{ArcTan} [\text{Exp} [\alpha(x - vt)]]$$

sa šíri systémom kyvadielok bez toho, aby dochádzalo k jeho rozpadu - disperzii na menšie vlnové balíky. Nelineárny člen teda "stabilizuje" toto riešenie "pred rozpadom".

Okrajové podmienky a ako ovplyvnia spektrum

Príklad - zvuk nádob

Mechanické vlnenie v stenách nádoby je dané pre všetky nádoby vlnovou rovnicou:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \Delta u = 0$$

Jej riešenie je však závislé aj na tvare nádoby. T.j. iné spektrum frekvencií bude mať polgul'ová nádoba a iné spektrum frekvencií bude mať nádoba tvaru valca, iné prstenec, atď. Príklad zo života: *hudobné nástroje*.

Analogická úloha pre iné diferenciálne rovnice je celou podoblasťou matematiky.

Ďakujem za pozornosť!